17/3/17 Μαθημα 5ο

Ασκησεις #1

① A) $\alpha \lesssim b \Leftrightarrow 0 \leq a-b$ οχι συμμετρικη
B) Ναι
Γ) οχι μεταβατικη

② $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$
Διαμεριση: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ xRy $\forall x,y \in A$ (όλα τα ζευγαρια).

αλλη διαμεριση:
$A=\{\alpha\} \sqcup \{\beta,\gamma\}$
$\alpha R \alpha$ → $\beta R \beta, \gamma R \gamma, \beta R \gamma, \gamma R \beta$
αλλη: $A=\{\beta\} \sqcup \{\alpha,\gamma\}$ οπως προηγουμενως
ή $A=\{\gamma\} \sqcup \{\alpha,\beta\}$
$A=\{\alpha\} \sqcup \{\beta\} \sqcup \{\gamma\}$ → $\alpha R a, \beta R \beta, \gamma R \gamma$

③ $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$
$\{(\alpha,\alpha), (\alpha,b), (\beta,\delta), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma), (\delta,\delta),$
$(b,a), (\delta,b), (\alpha,\delta), (\delta,a)\}$

④ Το ίδιο οπως προηγουμενως

⑤ A) είναι καλά ορισμενη $Z: \alpha * b = a^2 b^3$
B) οχι καλα ορισμενη $Z: \alpha * b = \alpha/(\alpha^2+b)$
Γ) οχι $1*(-4)=|-4|=4 \notin A$ $A=\{1,2,3,-4\}, \alpha * b = |b|$
Δ) οχι $3*4=7 \notin A$ $A=\{1,2,3,4\}, \alpha * b = \alpha + b$
E) Ναι
Ζ+) $A=\{1,-1\}$ με πολ/μο $1 \cdot 1 = 1 \in A$ ΝΑΙ
$1 \cdot (-1) = (-1) \in A$
$(-1) \cdot (-1) = 1 \in A$

π.χ. ένας ισομορφισμός

$\{[0],[1]\} \to \{1,-1\}$

$[0] \oplus [1] \mapsto 1\cdot(-1) = -1$

$[1] \mapsto -1$

⑥ $\mathbb{N}$: $\alpha * \beta = \text{ΕΚΠ}(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}$ άρα είναι καλά ορισμένη
κοινά και μη κοινά στην μεγαλύτερη δύναμη

⑦ $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \alpha b \neq 0 \ , \alpha, b \in \mathbb{R} \right\}$

$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| cd \neq 0 \ , c, d \in \mathbb{R} \right\}$

A: $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' & 0 \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in A$ με $\alpha\alpha' b b' \neq 0$

ισχύει

B: $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c' \\ d' & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cd' & 0 \\ 0 & dc' \end{pmatrix} \notin B$

B όχι

AUB : έχω τις περιπτώσεις:

i) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in A \subseteq A \cup B$

ii) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \alpha c \\ bd & 0 \end{pmatrix} \in B \subseteq A \cup B$

iii) $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cb \\ d\alpha & 0 \end{pmatrix} \in B \subseteq A \cup B$

iv) $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c' \\ d' & 0 \end{pmatrix} \in A \subseteq A \cup B$ δείξαμε ότι είναι καλά ορισμένη

Εξετάζω ότι αυ είναι ομάδα:

Προσεταιριστική: ισχύει από τον πολ/μο των πινάκων

Μοναδιαίο: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$

Αντίστροφος: $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha, b \neq 0 \Rightarrow \exists\, a^{-1}, b^{-1} \in \mathbb{R}$

Άρα δείξαμε ότι είναι ομάδα.

<u>παρατηρώ ότι</u>: $GL(2,\mathbb{R}) = \{2\times 2$ αντιστρέψιμοι$\}$ δεν είναι αβελιανοί. Αλλά $\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \, \alpha b \neq 0 \right\} \subseteq GL(2,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Μια ομάδα που δεν είναι αβελιανή δεν σημαίνει ότι δεν έχει αβελιανές υποομάδες.

$A \cup B$ πράξη καλά ορισμένη
προσεταιριστική από το γινόμενο των πινάκων
Μοναδιαίος $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A \subseteq A \cup B$

Αντίστροφος $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \in A$

$\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα υπάρχει ο αντίστροφος οπότε $A \cup B$ είναι ομάδα (με υποομάδα της) $\subseteq GL(2,\mathbb{R})$

8\. $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \alpha b \neq 0 , \alpha, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$

Η πράξη είναι καλά ορισμένη :
γινόμενο άνω-τριγωνικών = άνω τριγωνικό

Στοιχεία ακέραιοι → Αποτέλεσμα ακέραιοι.
Προσεταιριστική ισχύει από το γινόμενο πινάκων

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$.

$\exists \begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} \in A$

π.χ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$ αλλά $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \notin A$

Βρες τα a, b ώστε $\begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} \in A$

$\begin{pmatrix} \alpha & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha \alpha' = 1$ και $bb' = 1$

$\alpha, b \in \{ \pm 1 \}$

$\underset{\pm 1}{\alpha} c' + c \underset{\pm 1}{b'} = 0 \Rightarrow$ έχει λύση $\forall \in \mathbb{Z}$

$A' = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & c \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{Z} \right\}$

(9) $\mathbb{Z}$: $\left.\begin{aligned}(2k)*\beta &= 2k+\beta\\ (2k+1)*\beta &= 2k+1-\beta\end{aligned}\right\} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ πράξη καλά ορισμένη

Προσεταιριστική;

$((2k)*\beta)*\gamma = (2k+\beta)*\gamma$

$\beta = 2\lambda$, $2k+2\lambda+\gamma$ $\qquad$ $\beta = 2\lambda+1$, $2k+2\lambda+1-\gamma$

$2k*(\beta*\gamma)$

$\xrightarrow{\beta=2\lambda}$ $2k*(2\lambda+\gamma) = 2k+2\lambda+\gamma$

$\xrightarrow[\beta=2\lambda+1]{}$ $2k*(2\lambda+1-\gamma) = 2k+2\lambda+1-\gamma$

Θα κάνουμε το ίδιο για $2k+1$

$((2k+1)*\beta)*\gamma$ ....

$(2k+1)*(\beta*\gamma)$ ...

Ουδέτερο :

$\alpha*\beta=\alpha$ και $e*\beta=\beta$ $\quad e = ??$

$2k*e = 2k+e = 2k \Rightarrow e=0$

$(2k+1)*0 = 2k+1$ $\qquad 0*\beta = 0+\beta=\beta$ άρα 0 ουδέτερο στοιχείο

Θέλουμε $\forall\, \alpha,\beta$ να έχουμε

$\alpha*\gamma=0$ και $\delta*\beta=0$

$2k*\gamma=0 \Rightarrow \gamma=-2k$

$\gamma*2k=0$;;; $(-2k)*2k = -2k+2k=0$

Αντίθετος του $2k$ είναι το $-2k$.

$(2k+1)*\gamma=0 \Leftrightarrow 2k+1-\gamma=0 \Rightarrow \gamma=2k+1$

Αντίθετος $2k+1$

(10) $\cdot\ O = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$(a,\beta) * (\gamma,\delta) = (\alpha\gamma, a\delta + \beta)$

η πραξη μου είναι καλα ορισμενη

$\alpha\gamma \neq 0$ και $a\delta + \beta \in \mathbb{R}$

προσεταιριστική:

$((\alpha,\beta) * (\gamma,\delta)) * (\varepsilon, \zeta) =$

$(\alpha\gamma, a\delta + \beta) * (\epsilon, \zeta) =$

$(\alpha\gamma\epsilon, \alpha\gamma\zeta + a\delta + \beta)$

$(\alpha,\beta) * ((\gamma,\delta) * (\epsilon,\zeta)) = (\alpha,\beta) * (\gamma\epsilon, \gamma\zeta + \delta) =$

$= (\alpha\gamma\epsilon, \alpha\gamma\zeta + a\delta + \beta)$

αρα $((\alpha,\beta) * (\gamma,\delta)) * (\epsilon,\zeta) = (\alpha,\beta) * ((\gamma,\delta) * (\epsilon,\zeta))$

$(\alpha,\beta) * (\varepsilon,\varepsilon') = (\alpha,\beta)$

$\alpha\varepsilon = a$ και $a\varepsilon' + \beta = \beta$

$\varepsilon = 1$ $\qquad \varepsilon' = 0$.

Μοναδιαιο $(1,0)$.

Αντιθετο - Αντιστροφο:

$(\alpha,\beta) * (\alpha',\beta') = (1,0) \Leftrightarrow (\alpha\alpha', \alpha\beta' + \beta) = (1,0)$

$\alpha' = \frac{1}{a} = \alpha^{-1}$, $\alpha\beta' + \beta = 0 \Rightarrow \beta' = -\frac{\beta}{a}$

όπως είναι ο αντιθετος - αντιστροφος.

Γεννήτορες: Είναι το ελάχιστο υποσύνολο της ομάδας O ώστε κάθε στοιχείο να δίνεται από γινόμενο αυτών.

π.χ. $\Sigma_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\} = \underbrace{\langle f, g \rangle}_{\text{σχέση}}$

↳ είναι πεπερασμένη σχέση με 6 στοιχεία

Οι γεννήτορες είναι οι f και g. $f^3 = 1 = g^2$ και $gf = f^2 g$

• $(+, \mathbb{Z}) = \langle 1 \rangle$ όχι σχέση (το 1 δεν το περιορίζει κανένας.)

• $(+, \mathbb{Z}_n) = \underbrace{\langle [1]_n \rangle}_{\text{σχέση}}$ $[1]_n = [0]_n$

Υποομάδα μιας ομάδας:

Ορισμός: Έστω Y υποσύνολο μιας ομάδας O. Αν το Y με την ίδια πράξη αποτελεί ομάδα τότε καλείται υποομάδα της O και γράφουμε $Y \leq O$.

π.χ. $\mathbb{Q}^+ \subseteq (\mathbb{Q}, +)$ όχι υποομάδα — ο αντίθετος του $\frac{1}{2}$ είναι το $-\frac{1}{2}$

$(\mathbb{Q}^+, \cdot) \xleftrightarrow{\neq}$ δεν μπορώ να πω ότι είναι υποομάδα

$\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$

$\mathbb{Q}^* \leq \mathbb{R}^* \leq \mathbb{C}^*$ → μιλάμε για τον πολ/σμό.

Πρόταση: Έστω $Y \neq \emptyset$ υποσύνολο της ομάδας O. Αν ισχύει:

1) Το μοναδιαίο της $O \in Y$
2) η πράξη να είναι καλά ορισμένη
3) $\forall \alpha \in Y \Rightarrow \alpha^{-1} \in Y$

Τότε η Y είναι υποομάδα

ή

$\forall \alpha$ και $b \in Y \Rightarrow ab^{-1} \in Y$ (+)

αποδειξη:
Αν $Y \leq O$ τοτε αυτες οι ιδιοτητες ισχύουν.
Αν ισχύει ⊕ οτι $\forall \alpha$ και $b \in Y \Rightarrow \alpha b^{-1} \in Y$
θα δείξουμε οτι $Y \leq O$.
$Y \neq \emptyset \Rightarrow \exists a \in Y$ και $\alpha^{-1} \in O$
Αρα $a \cdot a^{-1} = 1_O \in Y$
Προσεταιριστική ισχύει γιατι ισχυει στο O.
$\forall \alpha \in Y \Rightarrow \exists a^{-1} \in Y$
$\alpha = 1$ και $b \in Y \overset{⊕}{\Rightarrow} 1 \cdot b^{-1} \in Y \Rightarrow b^{-1} \in Y$

→ Αν O ομαδα η υποομαδα της που περιέχει μονο το μοναδιαιο καλειται τετριμμενη
Επίσης ισχύει $O \leq O$.

π.χ. $(\mathbb{Q}^+, \cdot) \leq (\mathbb{Q}^*, \cdot) \leq (\mathbb{R}^*, \cdot)$

Προταση: Εστω α στοιχείο μιας ομαδας O. Τοτε το συνολο $\{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ αποτελει υποομαδα της O και καλειται η κυκλική υποομαδα που γενναται απο το α. $\langle \alpha \rangle \leq O$.

αποδειξη:
$A = \{\alpha^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \leq O$
$\forall \alpha^k, \alpha^l \in A \Rightarrow \alpha^k \alpha^{-l} \in A$
$\alpha^{k-l} \in A$ ισχύει

Προταση: Να βρεθουν όλες οι υποομαδες του $\mathbb{Z}$.
Είναι της μορφής $k\mathbb{Z}$.

αποδειξη: Εστω $Y \leq \mathbb{Z}$. Εστω k ο μικροτερος φυσικος μεσα στο Y. Προφανως τα στοιχεια km με $m \in \mathbb{Z}$ ανηκουν στο Y. $k \in Y \Rightarrow k + k \in Y \Rightarrow \underbrace{k + \dots + k}_{m} \in Y$

Αν $m > 0 \Rightarrow -k + (-k) + \dots + (-k) \in Y$

Θα δειξουμε $Y = k\mathbb{Z}$.

Εστω $l \in Y$ με $l \notin k\mathbb{Z} \Rightarrow$

$l = \pi k + v$, $0 < v < k$

$l, \pi k \in Y \Rightarrow l - \pi k \in Y \Rightarrow v \in Y$

Επειδη k ο μικροτερος φυσικος στο $Y \Rightarrow$ Ατοπο

Αρα $Y = k\mathbb{Z}$.

π.χ. 1) Η ομαδα του Klein

$K = \{1, a, b, c\}$ πραξη γινομενο ωστε: $\alpha \cdot \alpha = 1 = b \cdot b = c \cdot c$

$o(\alpha) = 2$, θα πρεπει $\alpha b = c = b \cdot a$

$\alpha c = b = ca$, $bc = a = cb$

$K = \langle a, b \rangle$ με ταξη $|K| = 4$ ειναι αβελιανη ομαδα.

οι σχεσεις που εχει: $\alpha^2 = 1 = b^2$ και $\alpha b = b\alpha$

γραφουμε $K = \langle \alpha, b \rangle$

$\alpha^2 = 1 = b^2$ και $\alpha b = b\alpha$.

Παω να βρω τις υποομαδες της K:

$\{1\}$, $\langle \alpha \rangle = \{\alpha, 1\}$, $\langle b \rangle = \{b, 1\}$, $\{\alpha b, 1\}$ ολες ειναι κυκλικες ταξης 2 εκτος απο $\{1\}$.

2) Βρες τις υποομαδες της $\mathbb{Z}_4$

$\{0\}$, $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_4$, $\langle 2 \rangle = (2, 0)$, $\langle 3 \rangle = (1, 3, 0) = \mathbb{Z}_4$

$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 = 4 = 0$

3) $\mathbb{Z}_5$ υποομαδες:

$\{0\}$, $\mathbb{Z}_5 = \langle 1 \rangle = \langle 2 \rangle = \langle 3 \rangle = \langle 4 \rangle$

το 5 εχει διαιρετες το 5 και το 1 γιαυτο εχει 2 υποομαδες.

Θεωρημα: Εστω $G = \langle \alpha \rangle$ κυκλική. Τοτε καθε υποομαδα της είναι κυκλική.

αποδειξη:

Εστω $Y \leq G$ και Y οχι κυκλική. Δηλαδη $\exists\, b, \gamma \in Y$ ωστε το γ να μην είναι δυναμη του b.

Εχουμε οτι:

$Y \subseteq G = \langle \alpha \rangle = \{ \alpha^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Εστω b η μικροτερη θετική δυναμη του a που ανηκει στο Y. $b = \alpha^{k_0}$ το ελαχιστο

$\gamma \in G \Rightarrow \gamma = \alpha^l$ και $\gamma = \alpha^l \neq (\alpha^{k_0})^{m}$

$l = \pi k_0 + u$ με $0 < u < k_0$

$\alpha^l = \alpha^{\pi k_0 + u} = (\alpha^{k_0})^{\pi} \alpha^{u} \Rightarrow \alpha^u = \alpha^l \cdot (\alpha^{k_0})^{-\pi} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha^u \in Y$ και $u < k_0$ ατοπο.

π.χ. Οι υποομαδες της $\mathbb{Z}_n$ είναι ολες κυκλικές. Αρα θα δινονται απο $\langle k \rangle$ με $0 \leq k \leq n-1$

Είναι ολες διαφορετικές ;; ΟΧΙ.

Αν k, m με $(k, n) = (m, n)$

τοτε $\langle k \rangle = \langle m \rangle$

$(1, u) = 1 = \langle l, n \rangle \Leftrightarrow \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_n = \langle l \rangle$

π.χ. $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha c \neq 0, \; a, c, b \in \mathbb{R} \right\}$

$A \leq GL(2, \mathbb{R})$

π.χ. Τεταρτονια - Quaternious

$Q_8 = \{ \pm I, \pm J, \pm K, \pm L \}$

$\{1\} \leq \mathbb{C}^*$, $\underset{\langle -1 \rangle}{\{\pm 1\}} \leq \mathbb{C}^*$, $\underset{\langle i \rangle}{\{i, -1, -i, +1\}} \leq \mathbb{C}^*$

$Q_8 = \{ \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \}$ $\quad |Q_8| = 8$

$o(i) = 4$, $o(j) = 4$, $ij = k$, $ji = -k$ οχι αβελιανη

$$Q_8 = \{\pm I, \pm J, \pm K, \pm L\}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_8 \leq GL(2, \mathbb{C})$$